

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

Modèles à chaîne de Markov pour des données historiques

Madalina Olteanu, James Ridgway

SAMM

Plan de la présentation

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- 1 Introduction
 - Quelques modèles classiques
- 2 Modèle ZIP-HMM
- 3 Modèle INAR(ρ)-HMM
- 4 Conclusion et perspectives

Introduction

Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- 1 Introduction
 - Quelques modèles classiques
- 2 Modèle ZIP-HMM
- 3 Modèle INAR(ρ)-HMM
- 4 Conclusion et perspectives

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction

Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- On s'intéresse à des séries temporelles à valeurs entières, pour lesquelles on suppose qu'il existe plusieurs régimes.
- Les séries de données étudiées concernent la production de textes normatifs savoyards entre 1559 et 1660, et en particulier le droit relatif à la logistique militaire.
- Ces données ont la particularité de présenter un nombre de zéro important, et d'être autoregressive à un certain ordre.

Chaînes de Markov cachées

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- Une chaîne de Markov est un processus à temps discret tel que

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \dots, X_1 = i_1) = \mathbb{P}(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$$

C'est à dire que pour prévoir à la date t , l'information antérieure à $t - 1$ n'apporte rien.

Exemple :

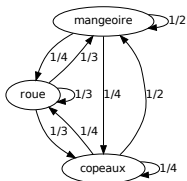


FIGURE: Exemple du hamster

- Une chaîne de Markov cachée est un processus à temps discret (S_t, X_t) tel que S_t une chaîne de Markov détermine l'état de la variable X_t , soit sous forme de graph :

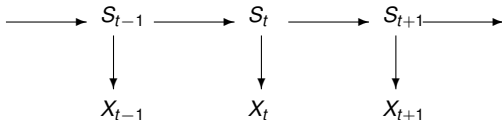


FIGURE: Chaîne de Markov Cachée

- On observe cette fois ci que le rythme cardiaque du hamster, avec la même chaîne de Markov que précédemment (non observée)

- Une première estimation a été réalisé sur des distributions “classiques”.
- Les résultats de l'estimation avec un modèle Poisson-HMM :

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.974 & 0.026 \\ 0.044 & 0.956 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0.208 \\ 0.73 \end{pmatrix}$$

- La forte dispersion en zéro n'est pas prise en compte avec une binomiale ou une Poisson
- De plus, la dépendance à l'ordre six évoquée par Julien n'est par prise en compte
- Le but de la collaboration a été de développer des modèles et des outils afin d'enrichir la package HMM

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- Le package HiddenMarkov ne permet que l'utilisation de distribution "clasique" et ne traite pas ces problèmes
- Pour palier ceci nous proposons d'implémenter un package R avec deux nouvelles distributions :
 - ZIP-HMM
 - INAR-HMM

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

**Modèle
ZIP-HMM**

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- 1 Introduction
 - Quelques modèles classiques
- 2 **Modèle ZIP-HMM**
- 3 Modèle INAR(ρ)-HMM
- 4 Conclusion et perspectives

Distributions “zero-inflated Poisson”

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- Une distribution ZIP est une distribution de Poisson à laquelle on rajoute une masse en zéro. C'est-à-dire qu'un zéro peut être généré par la Poisson ou de manière “structurelle”

$$(X_t) \sim \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } \omega + (1 - \omega)e^{-\lambda} \\ k > 0 & \text{avec probabilité } (1 - \omega) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \end{cases}$$

- On espère que l'utilisation de ce type de distribution arrivera à attraper l'excès de zéros, le paramètre ω va exprimer la probabilité d'un zéro structurel.

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

**Modèle
ZIP-HMM**

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- On utilise cette distribution dans le modèle décrit plus haut, où la chaîne de Markov détermine l'état des paramètres
- Soit formellement :

$$(X_t | S_t = e_i) \sim \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } \omega_i + (1 - \omega_i)e^{-\lambda_i} \\ k > 0 & \text{avec probabilité } (1 - \omega_i) \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^k}{k!} \end{cases}$$

- La chaîne de Markov détermine alors le niveau des paramètres du ZIP

Estimation dans des modèles ZIP-HMM

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- Dans le contexte des HMM, la vraisemblance s'exprime sous la forme d'une intégrale sur un espace de grande dimension. On se propose d'utiliser un algorithme EM pour maximiser la vraisemblance.
- Soit la procédure :
 - étape E calcule de $\mathbb{E}_{\theta}(\log L(Z, X, S; \theta'))$
 - étape M maximization en θ'
- La vraisemblance complète en introduisant une variable $Z_t = 1$ si $X_t = 0$ et 1 sinon

$$L(Z, X, S; \theta) = \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^q f(X_t, Z_t | S_t; \theta) \prod_{t=1}^{T-1} \prod_{i,j=1}^q \pi_{ij}^{1_{e_i, e_j}(S_t, S_{t+1})} \mu(S_t)$$

avec

$$\text{where } f(X_t, Z_t | S_t; \theta) = \omega_j^{1_{(1, e_j)}(Z_t, S_t)} (1 - \omega_j)^{1_{(0, e_j)}(Z_t, S_t)} \left(\frac{e^{\lambda_j} \lambda_j^{X_t}}{X_t!} \right)^{1_{(0, e_j)}(Z_t, S_t)}$$

- On obtient les estimateurs analytiques suivant :

$$\lambda_j = \frac{\sum_{t: X_t > 0} \mathbb{P}_{\theta^*}(S_t = e_j | X_1^n) * X_t}{\sum_{t: X_t = 0} \mathbb{P}_{\theta^*}(S_t = e_j | X_1^n) (1 - \alpha_j^*) + \sum_{t: X_t > 0} \mathbb{P}_{\theta^*}(S_t = e_j | X_1^n)}$$
$$\omega_j = \frac{\alpha_j^* \sum_{X_t=0} \mathbb{P}_{\theta^*}(S_t = e_j | X_1^n)}{\sum_{t:t=1}^T \mathbb{P}_{\theta^*}(S_t = e_j | X_1^n)}$$

Résultats sur des simulations

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

$N \backslash \omega_j$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
500	0.0026	0.0061	0.0097	0.0133	0.01179	0.00223
1000	0.0012	0.0025	0.0043	0.0057	0.0072	0.0092
5000	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004
10000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002

TABLE: MSE pour l'estimation de ω_j variant dans [0.1,0.6]

- Cependant on peut montrer que le modèle n'est pas identifiable si $\lambda_1 = \lambda_2$ et on ne peut pas obtenir de convergence théorique.

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

**Modèle
ZIP-HMM**

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

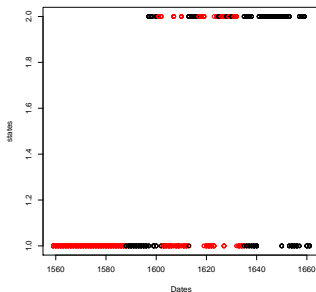


FIGURE: Classification des états à partir des probabilités *a posteriori*

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.979 & 0.021 \\ 0.036 & 0.964 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0.297 \\ 0.767 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.057 \end{pmatrix}$$

- Les transitions d'un état à un autre sont fréquentes, les résultats ressemblent beaucoup aux résultats précédents

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction

Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

**Modèle
INAR(ρ)-HMM**

Conclusion et
perspectives

- 1 Introduction
 - Quelques modèles classiques
- 2 Modèle ZIP-HMM
- 3 Modèle INAR(ρ)-HMM**
- 4 Conclusion et perspectives

- On cherche maintenant à prendre en compte la dépendance temporelle (à l'ordre 6)
- Le modèle est défini comme :

$$X_t = \alpha_1 \circ X_{t-1} + \alpha_2 \circ X_{t-2} + \cdots + \alpha_p \circ X_{t-p} + \epsilon_t \quad (1)$$

où $\epsilon_t \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\alpha_i \circ X_{t-i} = \sum_{j=1}^{X_{t-i}} \xi_{ji}$ avec $\xi_{ji} \sim \text{Ber}(\alpha_i)$ indépendant de ϵ_t et X_{t-i} .

- Quelque prop....

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(p)-HMM

Conclusion et
perspectives

- Comme précédemment on utilise ce modèle dans le contexte des HMM, une chaîne de Markov (S_t) détermine ici aussi la valeur des paramètres.
- Le modèle s'écrit :

$$X_t = \alpha_{1j} \circ X_{t-1} + \alpha_{2j} \circ X_{t-2} + \cdots + \alpha_{pj} \circ X_{t-p} + \epsilon_{it} \quad (2)$$

avec $\epsilon_{it} \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$

Estimation dans des modèles INAR(p)-HMM

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(p)-HMM

Conclusion et
perspectives

- Nous sommes ici aussi dans le cadre d'un HMM et devons faire appel à l'algorithme EM pour maximiser la vraisemblance
- On écrit la vraisemblance conditionnelle complète :

$$L_n(X_1^n, S_1^n | X_1^p; \theta) = \prod_{k=p}^n \pi(S_{k-1}; S_k) \prod_{k=p}^n f(X_k | X_{k-1}, \dots, X_{k-p}, S_k; \theta) \text{ Cte} \quad (3)$$

- L'étape E est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta'} \{ \log L_n(X_1^n, S_1^n; \theta) | X_1^n \} &\propto \sum_{k=p}^n \log(\pi(S_{k-1}; S_k)) \mathbb{P}_{\theta'}(S_{t-1} = s, S_t = s' | X_1^n) \\ &+ \sum_{k=p}^n \log(f(X_k | X_{k-1}, \dots, X_{k-p}, S_k; \theta)) \mathbb{P}_{\theta'}(S_k = s | X_1^n) \end{aligned}$$

- L'étape M est obtenue numériquement à l'aide d'un algorithme de Nelder-Mead (présent dans r-base)

Résultats sur des simulations

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

$N \backslash \lambda_i$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
100	0.026	0.046	0.075	0.144	0.122	0.161
500	0.0033	0.0062	0.0015	0.019	0.0243	0.0447

TABLE: MSE estimé pour λ_i variant dans [0.1,0.6]

- Les simulations montrent des résultats satisfaisants

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

**Modèle
INAR(ρ)-HMM**

Conclusion et
perspectives

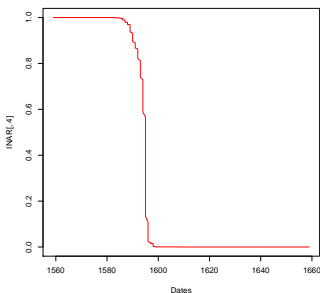


FIGURE: probabilité a posteriori

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.998 & 0.0012 \\ 0.0001 & 0.999 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0.306 \\ 0.205 \end{pmatrix}$$
$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.114 & 0.0617 & 0.0011 & 0.046 & 0.0521 & 0.117 \\ 0.0406 & 0.0041 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

- La matrice de transition correspond à des états beaucoup plus stables

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction

Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- 1 Introduction
 - Quelques modèles classiques
- 2 Modèle ZIP-HMM
- 3 Modèle INAR(ρ)-HMM
- 4 Conclusion et perspectives

M. Olteanu, J.
Ridgway

Introduction
Quelques modèles
classiques

Modèle
ZIP-HMM

Modèle
INAR(ρ)-HMM

Conclusion et
perspectives

- Deux nouveaux modèles et un package R sont proposés
- Le modèle INAR-HMM semble particulièrement bien adapté à ce type de données
- D'un point de vue théorique, il reste à démontrer les propriétés statistiques des estimateurs