

EXAMEN DE STATISTIQUE
MASTER STATISTIQUE & ÉCONOMÉTRIE (M1) 2016/2017

Examen sans document, et sans calculatrice.

Pour rappels, on dira que X suit une loi Beta $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ si sa densité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du} & \text{pour } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 Soit X_1, \dots, X_5 un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Quelle est la probabilité que les 4 plus petites observations soient dans l'intervalle $[0, 1/2]$, et pas la plus grande ?

2 On considère un échantillon i.i.d. de taille n , tiré suivant une loi de densité

$$f_\theta(x) = \theta(1+\theta)x^{\theta-1}(1-x) \text{ pour } x \in [0, 1].$$

Calculer l'estimateur de la méthode des moments de θ , noté $\hat{\theta}$. Montrer que cet estimateur n'est pas efficace.

On pourra admettre que

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \approx \frac{\theta(\theta+2)^2}{2n(\theta+3)}.$$

3 Considérons un échantillon $\{x_1, \dots, x_n\}$ tiré suivant une loi Beta $\mathcal{B}(\theta, \theta)$.

1. Trouver une statistique exhaustive pour θ pour un échantillon tiré suivant une loi Beta $\mathcal{B}(\theta, \theta)$.
2. Trouver un test de niveau α de $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta = 2$.

4 Une année, on observe la naissance de 528 enfants prématurés, dont 289 garçons. Proposer une procédure de test de $H_0 : \text{“les garçons ont plus de chances d'être prématurés que les filles”}$.

5 On dispose d'un échantillon $\{x_1, \dots, x_n\}$ tiré suivant un mélange

$$X = \begin{cases} U_1 \sim \mathcal{U}([0, a]) \text{ avec probabilité } \theta \\ U_2 \sim \mathcal{U}([0, b]) \text{ avec probabilité } 1 - \theta \end{cases}$$

avec $\theta \in (0, 1)$ et $a < b$. Soit N le nombre d'observations entre 0 et a dans l'échantillon. Quelle est la loi de N ? Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ?