

EXERCICES, SÉRIES TEMPORELLES, HIVER 2016, M1

ARTHUR CHARPENTIER

1 Soit (ε_t) un bruit blanc de variance σ^2 . Dans les 6 cas suivants, la série (X_t) est-elle stationnaire, au sens faible ? (en discutant de conditions en fonction des valeurs des différentes constantes, éventuellement)

- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$
- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}$
- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \varepsilon_t \cdot \cos[at] + \varepsilon_{t-1} \cdot \sin[at]$ avec $a \in \mathbb{R}$
- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$
- si pour tout $t \in \mathbb{N}$, $X_t = \sum_{i=0}^t a^i \cdot [\varepsilon_{t-i} - \varepsilon_{t-i-1}]$ avec $a \in \mathbb{R}$

2 Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur Gaussien et posons X_0 la variable aléatoire constante unitaire, $X_0 = 1$. Soit X une variable aléatoire de variance finie, telle que $\gamma = [\text{cov}(X, X_i)]_{i=0,1,\dots,n}$ existe. On posera $\Sigma = [\text{cov}(X_i, X_j)]_{i,j=0,1,\dots,n}$. Soit $\mathbf{a}^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$ tel que

$$\text{EL}(X | \underbrace{X_0, \dots, X_n}_{\mathbf{X}}) = \mathbf{a}^{*\top} \mathbf{X} = a_0^* + a_1^* X_1 + \dots + a_n^* X_n.$$

Montrer que \mathbf{a}^* est donné par $\mathbf{a}^* = \Sigma^{-1} \gamma$.

3 Soit (Y_t) une série stationnaire, et s_t une suite (déterministe) saisonnière de période d au sens où $s_t = s_{t-d}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

- On pose

$$X_t = a + bt + s_t + Y_t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $Z_t = (1 - L)(1 - L^d)X_t$ est une série stationnaire, et donner sa fonction d'autocovariance en fonction de celle de (Y_t) .

- On pose

$$X_t = [a + bt] \cdot s_t + Y_t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $Z_t = (1 - L^d)^2 X_t$ est une série stationnaire, et donner sa fonction d'autocovariance en fonction de celle de (Y_t) .

4 Soit (X_t) une série temporelle telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} + \varepsilon_t \quad (\star)$$

où (ε_t) un bruit blanc de variance σ^2 . Montrer qu'il existe une suite réelle (a_n) telle que

$$Y_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varepsilon_{t-n}$$

vérifie la relation de récurrence de l'Equation (\star) . Montrer que (ε_t) n'est pas le processus d'innovation de (Y_t) .

5 Soit (X_t) une série temporelle définie par $X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$, avec $|\theta| > 1$, où (ε_t) un bruit blanc de variance σ^2 . On définit

$$Y_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\theta^k} X_{t-k}.$$

Montrer que (Y_t) est un bruit blanc dont on spécifiera la variance.

6 Soit (X_t) une série temporelle stationnaire, définie par $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, avec $|\phi| > 1$, où (ε_t) un bruit blanc de variance σ^2 . On définit

$$Y_t = X_t - \frac{1}{\phi} X_{t-1}$$

Montrer que (Y_t) est un bruit blanc dont on spécifiera la variance.

7 Considérons deux processus stationnaires, (X_t) et (Y_t) tels que pour tout $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + U_t \text{ et } Y_t = \phi_2 Y_{t-1} + \theta X_t + V_t$$

où (U_t) et (V_t) sont deux bruits blancs non corrélés, de variance σ_U^2 et σ_V^2 respectivement. On suppose que $\phi_1, \phi_2 \in (0, 1)$.

- Posons $Z_t = (1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L)Y_t$. Montrer que (Z_t) est stationnaire, et calculer sa fonction d'autocorrélation.
- Simuler un tel processus, avec $\theta = 3/2$, $\phi_1 = 3/5$, $\phi_2 = 2/5$ et avec les variances des bruits $(3/5)^2$ et $(2/5)^2$, respectivement, pour 1000 valeurs, et tracer la fonction d'autocorrélation empirique.
- Montrer que (Y_t) est un processus *ARMA*

8 On considère deux séries stationnaires (X_t) et (Y_t) , telles que pour tout t et $h \in \mathbb{Z}$, $\text{Cov}(X_t, Y_{t+h}) = 0$. Montrer que $Z_t = X_t + Y_t$ est stationnaire. Donnez sa fonction d'autocovariance.

9 Soit (u_t) une suite de variables i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose

$$\begin{cases} \varepsilon_t = u_t & \text{si } t \text{ est pair} \\ \varepsilon_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{t-1}^2 - 1) & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

La série (ε_t) est-elle un bruit blanc au sens faible ? au sens fort ?

10 Soit (X_t) un processus AR(1) d'innovation (ε_t) , et considérons un bruit blanc (η_t) indépendant de (ε_t) (au sens où $\text{cov}(\varepsilon_t, \eta_{t+h}) = 0$ pour tout t, h). Montrer que (Y_t) défini par $Y_t = X_t + \eta_t$ est un processus ARMA(1,1).

11 On considère le processus moyenne mobile suivant

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_{12} \varepsilon_{t-12}$$

où (ε_t) est un bruit blanc. Donnez les autocorrélations de la série (X_t) .

12 On considère le processus autorégressif suivant

$$X_t = \phi X_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

où (ε_t) est un bruit blanc. A quelle(s) condition(s) sur ϕ existe-t-il une solution stationnaire ? Donnez les autocorrélations de la série (X_t) . A l'aide des équation de Yule-Walker, trouver des estimateurs pour ϕ et σ à partir de $\hat{\gamma}(0)$ et $\hat{\gamma}(1)$.

13 On considère un processus MA(1), $X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$. Mais on hésite entre $\theta = 3$ et $\theta = 1/3$. Donnez les fonctions d'autocorrélations dans ces deux cas.

14 Soit (X_t) une série stationnaire, de fonction d'autocovariance $\gamma(h)$.

(1) On pose, pour $n \geq 2$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$$

Exprimez la variance de \bar{X}_n en fonction des autocorrélations $\gamma(\cdot)$.

(2) On pose

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n [X_t - \bar{X}_n]^2$$

Exprimez $\mathbb{E}(S^2)$ en fonction de $\gamma(0)$ et de la variance de \bar{X}_n .

15 Soient (X_t) et (Y_t) deux processus AR(1), avec

$$(1 - aL)X_t = u_t \text{ et } (1 - bL)Y_t = v_t$$

où les bruits blancs (u_t) et (v_t) sont supposés indépendants, et où $a \neq b$. Montrer que (Z_t) défini comme $Z_t = X_t + Y_t$ suit un processus $ARMA(2, 1)$.

15★ Pour les plus motivés, montrer que plus généralement, si (X_t) et (Y_t) sont deux processus AR(p_X) et AR(p_Y), avec des bruits non-corrélés, et des racines distinctes, (Z_t) défini comme $Z_t = X_t + Y_t$ suit un processus $ARMA(p_X + p_Y, \max\{p_X, p_Y\})$.

16 On suppose que (X_t) un processus MA(1) d'innovation (ε_t) , avec

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Malheureusement, une observation - à la date τ - manque.

- (1) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau-2}$ et $X_{\tau-1}$
- (2) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau+2}$ et $X_{\tau+1}$
- (3) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau-1}$ et $X_{\tau+1}$
- (4) laquelle de ces extrapolations aura l'erreur quadratique moyenne la plus faible ?

17 On suppose que (X_t) un processus AR(1) d'innovation (ε_t) , avec

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Malheureusement, une observation - à la date τ - manque.

- (1) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau-2}$ et $X_{\tau-1}$
- (2) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau+2}$ et $X_{\tau+1}$
- (3) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau-1}$ et $X_{\tau+1}$
- (4) laquelle de ces extrapolations aura l'erreur quadratique moyenne la plus faible ?