

« MATHINESS » ET ASSURANCE

Arthur Charpentier

Professeur, Université du Québec, Montréal

Béatrice Cherrier

Maître de conférences, Université de Caen

Au printemps dernier, l'économiste Paul Romer lançait une discussion passionnante autour de la notion de « mathiness ⁽¹⁾ ». Son essai très remarqué a réactivé des débats plus larges sur la place du formalisme mathématique en économie, les stratégies de modélisation (réalisme des hypothèses, etc.) et les liens entre théorie et travail empirique. Ces débats méthodologiques ont ressurgi périodiquement au cours du XX^e siècle, et l'écho qu'ils trouvent en ce moment auprès des assureurs, qui s'interrogent eux aussi sur les modèles actuariels, n'a probablement rien d'une coïncidence.

Clarification ou complexification suspecte du discours économique

Cherchant une explication à l'absence de consensus entre les théoriciens de la croissance malgré vingt ans de débats, Romer [2015] accuse certains de ses collègues d'utiliser le langage mathématique comme un écran de fumée. Formuler les modèles de croissance dans une « novlangue » – pour reprendre l'expression de Georges Orwell – d'équation permettrait à certains économistes d'utiliser des hypothèses frauduleuses et d'en tirer des conclusions non valides : « *Like mathematical theory, mathiness uses a mixture of words and symbols, but instead of making tight links,*

it leaves ample room for slippage between statements in natural versus formal language and between statements with theoretical as opposed to empirical content. » Ce faisant, ils légitimeraient le constat de Tim Harford [2015] – « *economics has a reputation for producing rigorous nonsense* » – et alimenteraient la suspicion de nombreux critiques, qui voient les modèles économiques comme des chevaux de Troie d'idéologies variées. Et de même que la réponse à la novlangue n'est pas d'arrêter de parler, la réponse de Romer au problème de « mathiness » n'est pas d'arrêter d'utiliser un formalisme mathématique. Il s'agit plutôt de défendre une éthique scientifique à l'image de celle de Richard Feynman.

La critique de Romer est d'autant plus significative que la mathématisation des modèles économiques au XX^e siècle fut fondée sur la conception partagée que « les mathématiques sont un langage » permettant

de rendre les raisonnements plus clairs, moins ambigus et plus testables. De Paul Samuelson à Kenneth Arrow, nombreux sont les économistes qui reprennent cette formule souvent attribuée à l'un des fondateurs de la thermodynamique, Josiah W. Gibbs. En particulier, cette formule trouve un écho chez les émigrés, qui, comme Jacob Marschak ou John Von Neumann, ont cruellement besoin d'un langage universel pour s'établir aux États-Unis. Mais à y regarder de plus près, c'est bien leur seul point d'accord. Gérard Debreu, formé à l'école bourbakiste, considérait l'économie comme une branche des mathématiques appliquées et déclarait ainsi : « *The full understanding of a problem required no compromise whatsoever with rigor* » [Düppe et Weintraub, 2014]. Tel n'était pas l'avis de ceux qui comme Irving Fisher, formé par Gibbs, ou Samuelson, influencé par le prix Nobel de physique Percy W. Bridgman, prenaient exemple sur la physique. En introduction de sa thèse *Foundations of Economic Analysis* (1947), Samuelson développait ainsi l'idée que le travail de l'économiste consiste à dériver des « *operationally meaningful theorems* », c'est-à-dire des énoncés empiriquement testables.

Langage universel des sciences ?

Les débats autour de la mathématisation sont, on le voit, étroitement liés aux discussions sur le réalisme des modèles. Pour les économistes qui souhaitaient modéliser la science économique comme les sciences physiques, ce point était central. Les agents économiques correspondent aux particules, les dépenses à l'énergie cinétique, la contrainte de budget à la conservation de l'énergie. Les droites tangentes et perpendiculaires que l'on trace sur les courbes d'iso-utilité font penser aux champs de force en physique, comme le note Philip Mirowski [1989]. Mais la physique est une science dont les variables correspondent à des grandeurs réelles, observables, quantifiables. Ses équations décrivent, par exemple, la trajectoire d'objets, que des expériences permettent de vérifier. La conquête

spatiale est la preuve que l'on peut prévoir la trajectoire de satellites, et ce de manière très fine (comme en a témoigné la mission Rosetta, et l'atterrisseur Philae, pendant l'été 2014).

En économie, le lien entre la théorie et l'expérience ou l'empirisme est plus complexe. On cherche, par exemple, à prévoir le prix qu'un assuré est prêt à payer pour s'assurer ou celui qu'un assureur est prêt à déboursier lors de ventes aux enchères de banderoles publicitaires, et ces données sont subjectives. On souhaite également comprendre les conséquences macroéconomiques de ces comportements, ce qui pose des problèmes d'agrégation. La correspondance entre les symboles mathématiques utilisés et les observations empiriques est source de controverses, comme le montre l'exemple de la croissance cher à Romer. Les modèles de croissance font, comme la majorité des modèles économiques, l'hypothèse que les agents cherchent à maximiser une utilité intertemporelle de la forme

$$\sum_{t \geq 1} \beta^{t-1} u(C_t)$$

sous une contrainte de budget. Cela permet de ramener le problème de la croissance à un programme d'optimisation, dont la résolution se fait classiquement en utilisant l'équation d'Euler. En mathématiques, celle-ci donne une condition suffisante pour trouver l'optimum $x^*(t)$ d'un programme d'optimisation dynamique, de la forme

$$\max \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \right\}$$

sous une contrainte de la forme $x(t_0)$ donnée. Dans ce cas, l'optimum vérifie une relation de la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^*} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^*}$$

si la fonction $f(\cdot)$ est suffisamment régulière (2). Les modèles classiques de croissance constituent donc une version très simple du programme d'optimisation précédent (dans une version en temps discret) et où u

est l'utilité de l'agent. Si r est le taux sans risque, on obtient alors l'équation d'Euler (telle qu'elle est enseignée en économie depuis des décennies)

$$u'(C_t) = \beta[1+r]u'(C_{t+1})$$

Cette équation permet – si on connaît l'utilité d'un agent – d'obtenir son processus de consommation.

La modélisation mathématique du problème de la croissance permet donc d'en fournir une résolution dont la validité théorique, qui dérive de l'utilisation de l'équation d'Euler, n'est pas contestable⁽³⁾. En revanche, la validité empirique de ce modèle est bien plus difficile à établir. Premièrement, l'interprétation des objets mathématiques – leur « opérationnalisation », pour reprendre les termes de Samuelson – fait débat. À quoi correspond ce « taux sans risque », par exemple ? L'opérationnalisation des objets dont la contrepartie empirique n'est pas contestable n'est pas problématique : comment mesure C_t ? Quel est le meilleur agrégat statistique pour rendre compte de la consommation ? Comment effectuer le passage d'une grandeur théorique microéconomique à un agrégat statistique macroéconomique ? L'utilisation de la fiction d'un « agent représentatif » est-elle pertinente ? Enfin, les techniques qu'ont développées les économistes pour confronter ces modèles théoriques et ces agrégats statistiques – l'économétrie – font l'objet de controverses acharnées depuis presque un siècle.

Mathématiques financières et finance de marché

On pourrait être ainsi tenté de croire que les mathématiques ne sont utilisées en économie qu'à des fins théoriques, et donc que cela est relativement inoffensif pour le monde réel. Mais nombreux sont ceux qui ont affirmé que les mathématiques ne furent pas neutres dans les récentes crises financières. Dans son rapport de 2013, la Commission parlementaire

britannique sur les normes bancaires [2013] pointait du doigt certaines firmes qui auraient utilisé les mathématiques « *to pull the wool over the eyes of the regulator* » (que l'on pourrait traduire de manière moins imagée par « pour duper le régulateur »), et les régulateurs américains ont critiqué de semblables tours de passe-passe mathématiques [United States Senate, 2013]. Se cacher derrière la sophistication des modèles pour ne pas avoir à se justifier ne date pas d'hier. Comme le rappelle Tim Johnson, citant Levy [2012], en 1877, un gros assureur américain se défendait de détruire la mutualisation entre assurés face au régulateur en expliquant : « *There are certain fundamental rules [...] which can only be understood by actuaries, and it is impossible for me to go into here.* » On retrouve ici la critique de Romer, qui souligne à plusieurs reprises que, au-delà de la question du réalisme des modèles, c'est bien l'utilisation des mathématiques pour créer un écran de fumée qui est dangereuse.

Mais, pour Ivar Ekeland [2010], la crise financière ne remet en rien en question les modèles de finance mathématique. L'article de Black et Scholes, dont la formule semble visée, commence par l'affirmation « *it should not be possible to make sure profits* » [Black & Scholes, 1973], et cette règle d'absence d'opportunité d'arbitrage est fondée. S'il est possible, dans les faits, de faire des profits certains, c'est parce que le marché réel fonctionne mal, et ce pour des raisons institutionnelles, pas parce que la théorie mathématique (y compris ses fondements) est fautive : « *If speculative profits have been made more secure, it is because the governments paid off the bad bets, not because some mathematical magic prevented the risk from materializing* » [Ekeland, 2010]. Black et Scholes proposent non seulement d'utiliser des outils théoriques permettant de formaliser ce principe d'absence d'opportunité d'arbitrage, notamment les travaux de Kenneth Arrow et Gérard Debreu, qui définissaient les prix contingents dans un contexte d'équilibre général – une idée que l'on trouvait déjà chez Alfred Marshall, par exemple –, mais leur formule du prix de l'option est énoncée dans l'hypothèse que la dynamique des prix des actifs sous-jacents suit

une autre équation. Cette dernière peut être vue comme ayant vocation à décrire le réel, tout en étant suffisamment simple pour être utilisée en pratique. « *This explains the enormous importance Black attached to developing simple and workable models. The point was first of all to get a model that people wanted to use, and then let the use itself change consciousness and determine the direction of future evolution. In this way, theory and practice would evolve together* », comme l'affirmait Perry Mehrling [2000]. Mais cette volonté de décrire simplement le réel a été dépassée, car le modèle de Black et Scholes a fini par construire (ou performer) le réel, comme le rappelle Donald MacKenzie [2006].

Mais l'utilisation de modèles trop simples, qui finissent par imposer des prix, est à double tranchant. On peut penser aux modèles de défauts, utilisés dans la valorisation des dérivés de crédit à la fin des années 1990. Ces modèles, qui sous-estimaient (de par la nature fondamentalement gaussienne) la contagion des défauts, sont en grande partie responsables de la crise dite des *subprimes*. Pourtant, la pratique de la modélisation repose sur une simplification nécessaire du réel. Sinon on tombe dans les travers dénoncés dans une nouvelle fameuse ⁽⁴⁾ de Jorge Luis Borges [1982] où un cartographe veut faire carte si détaillée qu'elle occupe la taille de la ville tout entière.

La simplicité des modèles actuariels

La tranquillité des débats sur les modèles en assurance offre un contraste intéressant avec les accusations de « *mathiness* » qui animent les discussions sur le statut des modèles financiers. Pourtant, l'assurance est elle aussi à l'intersection des mathématiques et de l'économie ⁽⁵⁾, puisque son objet est la formalisation mathématique des risques assuranciers.

Un des résultats les plus importants en économie de l'assurance est probablement le résultat de

Jan Mossin sur le partage des risques, publié en 1968 [Mossin, 1968]. Il indique que si le prix demandé par un assureur excède la prime pure (et on peut supposer que c'est souvent le cas, au moins pour des raisons de solvabilité), alors il n'est pas optimal pour un assuré de s'assurer complètement ; un contrat avec franchise est alors optimal. Pourtant, beaucoup d'assurés souscrivent des contrats avec une franchise très faible. De même, le majorant de la probabilité de ruine obtenu par Filip Lundberg en 1903, dans le contexte où la ruine correspond à un résultat financier négatif (sans endettement possible ou mise à jour de la prime), n'est jamais utilisé par la réglementation pour fixer un niveau de capital réglementaire ⁽⁶⁾. Le modèle de croissance de la population proposé par Benjamin Gompertz à la fin du XIX^e siècle était basé sur une force de mortalité qui augmente de manière exponentielle avec l'âge, il est donc dépassé. Aucun de ces trois modèles n'est validé empiriquement, et chacun est pourtant évoqué dans tous les cours d'économie de l'assurance. Cet état de fait traduit l'approche que les assureurs ont de la modélisation : les modèles simples, pour « irréalistes » qu'ils soient, permettent de faire comprendre beaucoup plus de choses que des modèles complexes. Ils permettent d'éclairer des débats bien plus qu'ils ne les obscurcissent en focalisant sur des aspects trop techniques. C'était très exactement l'état d'esprit de Robert Solow, quand il déclarait en 1970 : « *I don't think [very simple] models lead directly to prescription for policy or even to detailed diagnosis [...] they are more like reconnaissance exercises. If you want to know what it's like out there, it's all right to send two or three fellows in sneakers to find out the lay of the land and whether it will support human life. If it turns out to be worth settling, then that requires an altogether bigger operation* » [Halsmayer, 2014].

Depuis plus d'un siècle, les assureurs ont compris que les modèles mathématiques actuariels étaient trop simples pour être utilisés sans « bon sens ». Les modèles actuariels peuvent être vus comme des modèles normatifs permettant d'appréhender des situations complexes. Pour reprendre la formule de Lundberg, le fait que la probabilité de ruine décroisse

exponentiellement vite avec les fonds propres est un résultat intéressant : augmenter les fonds propres de 10 % peut largement baisser la probabilité de ruine (peut-être plus que de 10 %). Dans ce modèle, la réassurance peut être une alternative pour diminuer la probabilité de ruine à fonds propres fixés. Et cette idée simple peut être utilisée en pratique, sans dogmatisme mathématique exagéré.

En assurance, les modèles de sciences actuarielles et les pratiques actuarielles ont donc toujours cohabité sereinement, les uns cherchant à modéliser des phénomènes complexes, les autres cherchant des justifications à des pratiques séculaires ou, au contraire, des réponses à des problèmes nouveaux. Ironie du sort, cette attitude pragmatique a fini par rendre l'assurance vulnérable à une autre variante des critiques actuellement en vogue, que Romer résume par : « *empirical work is science, theory is entertainment* » [Romer, 2015]. L'essor des techniques quasi expérimentales en économie, le retour de la philosophie inférentielle et de l'apprentissage statistique, l'explosion de la quantité de données disponibles et les progrès des sciences de l'informatique ont convaincu certains chercheurs que l'on pourrait se dispenser de théorie. Chris Anderson conclut un article intitulé "The End of Theory" [Anderson, 2008] par le constat suivant : « *Correlation supersedes causation, and science can advance even without coherent models, unified theories, or really any mechanistic explanation at all.* » Sa prédiction est que les modèles vont finir par apprendre tout seuls. Dans ce cas, à supposer que le problème de la tarification actuarielle dans un contexte concurrentiel peut être posé correctement, il suffira bientôt d'écrire un algorithme pour le résoudre et de laisser la machine apprendre au fur et à mesure. On retrouve ici la volonté de certains assureurs de donner plus de place aux algorithmes et d'automatiser de nombreuses pratiques, y compris celles reposant sur l'expertise des actuaires dans les sociétés d'assurance. Au final, l'idée de rejeter les « modèles mathématiques » au profit d'un apprentissage direct à partir des données pourrait bien être la traduction, dans les débats qui agitent le monde de l'assurance, de cette idée de « *mathiness* ».

Notes

1. « *Mathitude* » pourrait en être la traduction la plus simple, pour reprendre l'expression d'Anne Lavigne [2015].
2. On pourra consulter Bourguignon [2008] pour une preuve complète, mais c'est juste une conséquence du principe de Pontryagin en calcul variationnel.
3. Et ce d'autant plus que l'équation économique est (comme souvent) le cas particulier incroyablement plus simple que le théorème général dont il tire le nom. Si on peut discuter des limites des hypothèses du modèle mathématique (propriétés de régularité en chacune des composantes, par exemple), on voit qu'elles n'affectent en rien la validité du cas particulier.
4. Cette illustration était reprise dans Rodrik [2015].
5. Trowbridge [1989], par exemple, considère que le premier pilier fondateur de la science actuarielle est l'économie du risque plutôt que les probabilités.
6. On pourrait oser un parallèle entre l'approche de Lundberg et celle de Black et Scholes. Dans les deux cas, une description du réel est proposée (avec l'utilisation du processus de Poisson composé pour modéliser la survenance de sinistres, et l'utilisation du mouvement brownien géométrique pour modéliser le processus de prix d'une action, respectivement), et à partir de ce modèle, des formules analytiques sont données (un majorant de la probabilité de ruine – qui est un calcul exact dans certains cas – pour le premier, et la valeur d'une option sur cette action pour les seconds). Mais le parallèle s'arrête là, car, si la formule de Black et Scholes a longtemps été utilisée sur les marchés financiers stricto sensu pour donner un prix, la formule de Lundberg n'a jamais eu d'impact immédiat, si ce n'est qu'elle a permis une meilleure compréhension de la solvabilité des sociétés d'assurance.

Bibliographie

- ANDERSON C., "The End of Theory: The Data Deluge Makes the Scientific Method Obsolete", *Wired Magazine*, vol. 16(7), 2008.
- BLACK F. ; SCHOLES M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, vol. 81, n° 3, 1973, pp. 637-654.

- BOURGUIGNON J.-P., *Calcul variationnel*, Éditions de l'École polytechnique, 2008.
- BORGES J. L., *L'auteur et autres textes*, Gallimard, 1982.
- DÜPPE T. ; WEINTRAUB E. R., *Finding Equilibrium: Arrow, Debreu, McKenzie and the Problem of Scientific Credit*, Princeton University Press, 2014.
- EKELAND I., "Response to Rogalski", *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32(2), 2010, pp. 9-10.
- HARFORD T., "Down with Mathiness!", *Financial Times* (en ligne), 5 juin 2015, <http://www.ft.com/intl/cms/s/0/c6edf100-0964-11e5-8534-00144feabdc0.html>
- HALSMAYER V., "From Exploratory Modeling Long-Run Utopia to Technical Expertise: Solow's Growth Model as a Multipurpose Design", *History of Political Economy*, vol. 46, n° 1 (suppl.), 2014, pp. 229-251. Voir http://hope.dukejournals.org/content/46/suppl_1/229.abstract
- JOHNSON T. C., "Finance and Mathematics: Where is the Ethical Malaise?" *The Mathematical Intelligencer*, vol. 37, 2015, pp. 1-4.
- LAVIGNE A., « Mathisme... », 16 mai 2015, <http://legizmoblog.blogspot.com/2015/05/mathisme.html>
- LEVY J., *Freaks of Fortune: The Emerging World of Capitalism and Risk in America*, Harvard University Press, 2012.
- LUNDBERG F., *Approximerad Framställning av Sannolikehetsfunktionen, Återförsäkring av Kollektivrisker*, Almqvist & Wiksell, Uppsala, 1903.
- MACKENZIE D., *An Engine, Not a Camera: How Financial Models Shape Markets*, MIT Press, 2006.
- MEHRLING P., "Understanding Fischer Black", 30 août 2000, https://economics.barnard.edu/sites/default/files/inline/understanding_fischer_black.pdf
- MIROWSKI P., *More Heat than Light: Economics as Social Physics, Physics as Nature's Economics*, Cambridge University Press, 1989.
- MOSSIN J., "Aspects of Rational Insurance Purchasing", *Journal of Political Economy*, vol. 76, 1968, pp. 553-568.
- Parliamentary Commission on Banking Standards, "Changing Banking for Good", First Report of Session 2013-14, vol. I-IX, juin 2013. Disponible en PDF : <http://www.parliament.uk/business/committees/committees-a-z/joint-select/professional-standards-in-the-banking-industry/publications/?type=15&session=1&sort=false&inquiry=all>(<http://www.parliament.uk/business/committees/committees-a-z/joint-select/professional-standards-in-the-banking-industry/publications/?type=15&session=1&sort=false&inquiry=all>)
- RODRIK D., "Economists vs. Economics", 10 septembre 2015, <http://www.project-syndicate.org/commentary/economists-versus-economics-by-dani-rodrik-2015-09>
- ROMER P., "Mathiness in the Theory of Economic Growth", *American Economic Review*, vol. 105(5), 2015, pp. 89-93.
- TROWBRIDGE C. L., *Fundamental Concepts of Actuarial Science*, AERF, 1989. Disponible en PDF : http://www.actuarialfoundation.org/research_edu/fundamental.pdf
- United States Senate, "JPMorgan Chase Whale Trades: A Case History of Derivatives Risks and Abuses", Majority and Minority Staff Report, Permanent Subcommittee on Investigations, 2013.