

COPULES ET VALEURS EXTRÊMES, HIVER 2014, MAT8595

ARTHUR CHARPENTIER

EXAMEN FINAL (2 heures)

L'épreuve dure 2 heures, les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Il y a un exercice, comprenant 7 questions, et 5 (courts) exercices indépendants les uns des autres.

Des réponses claires, précises et concises sont demandés. L'absence de clareté fera perdre des points. Les réponses doivent être portées dans le cahier.

Exercice 1 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires positives, telles que

$$H(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}}, \quad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Donner les fonctions de répartitions marginales de X et Y (notées F et G respectivement), ainsi que la copule associée.

Notons que cette loi est absolument continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on peut donc parler de *la* copule, par le théorème de Sklar. Pour les fonctions de répartition, on fait un passage à la limite,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{y \uparrow \infty} H(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

et

$$G(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \lim_{x \uparrow \infty} H(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}$$

Les fonctions quantiles associées sont ici

$$F^{-1}(u) = \log(u1 - u) \quad \text{et} \quad G^{-1}(v) = \log(v1 - v)$$

de telle sorte que *la* copule est

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

qui s'écrit

$$C(u, v) = \frac{1}{1 + 1 - uu + 1 - vv} = \frac{1}{1u + 1v - 1}$$

soit, en multipliant en haut et en bas par uv ,

$$C(u, v) = \frac{uv}{v + u - uv}.$$

Pour information, c'est la loi introduite dans Gumbel (1961).

Soit $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ un échantillon i.i.d. de loi H .

2. Donner la fonction de répartition de $M_n = \max\{X_i | i = 1, \dots, n\}$.
3. En choisissant convenablement des suites (a_n) et (b_n) , montrez que la limite

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \text{ peut être } \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)).$$

Donnez le max-domaine d'attraction pour les variables X_i .

C'est toujours la même histoire ! Comme on a vu en cours, *la* transformation que l'on utilise sans cesse est

$$\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \sim \exp[-a] \text{ lorsque } n \uparrow \infty.$$

On sait aussi que

$$\frac{1}{1+u} \sim 1 - u + \frac{u^2}{2} + \dots \text{ lorsque } u \downarrow 0$$

De notre côté, dans la parenthèse, on avait

$$\frac{1}{1+e^{-x}}$$

Si on se place non pas en x mais en $x + \log(n)$, histoire d'avoir une quantité qui tend vers 0,

$$\frac{1}{1+e^{-x-\log(n)}} \sim 1 - e^{-x-\log(n)} = 1 - \frac{e^{-x}}{n}$$

Aussi, on a

$$\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \sim \exp[-e^{-x}] \text{ lorsque } n \uparrow \infty,$$

qui est exactement la quantité que l'on cherche. On utilise alors ici

$$a_n = \log(n) \text{ et } b_n = 1.$$

On a trouvé ici des suites telles que la limite du maximum est du même type que la loi de Gumbel. On est donc dans le Max Domaine d'Attraction de la loi de Gumbel.

D'ailleurs, comme on a vu en cours, pour des lois dans le MDA de Gumbel, on a vu qu'on pouvait poser

$$b_n = 1 \text{ et } a_n = F^{-1}(1 - 1/n) = \log(n).$$

3. Donner la fonction de répartition du couple

$$(\max\{X_i | i = 1, \dots, n\}, \max\{Y_i | i = 1, \dots, n\}).$$

En déduire la copule de ce vecteur aléatoire.

La loi du couple est ici

$$(x, y) \mapsto H(x, y)^n = \left(\frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}\right)^n$$

Histoire de simplifier, notons H_n cette fonction de répartition, et F_n et G_n les lois marginales associées. Notons que

$$F_n^{-1}(u) = \log\left(\frac{u^{1/n}}{1-u^{1/n}}\right)$$

Pour avoir la copule - que l'on va noter C_n - on utilise

$$C_n(u, v) = H_n(F_n^{-1}(u), G_n^{-1}(v))$$

soit

$$C_n(u, v) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1-u^{1/n}}{u^{1/n}} + \frac{1-v^{1/n}}{v^{1/n}}} \right)^n$$

$$C_n(u, v) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{u^{1/n}} - 1 + \frac{1}{v^{1/n}} - 1} \right)^n$$

$$C_n(u, v) = \left(\frac{[uv]^{1/n}}{u^{1/n} + v^{1/n} - [uv]^{1/n}} \right)^n$$

soit quelquechose du genre

$$C_n(u, v) = [uv] \cdot \left(u^{1/n} + v^{1/n} - [uv]^{1/n} \right)^{-n}.$$

4. Calculer les indices de dépendance de queue pour cette copule, où, pour rappel

$$\lambda_L = \lim_{u \downarrow 0} \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(u) | Y \leq G^{-1}(u))$$

et

$$\lambda_U = \lim_{u \downarrow 0} \mathbb{P}(X > F^{-1}(1-u) | Y > G^{-1}(1-u))$$

On peut utiliser la copule, car on a vu que

$$\lambda_L = \lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{u} \frac{u^2}{2u - u^2} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{2 - u} = \frac{1}{2} (> 0).$$

Pour l'indice de queue supérieure, on utilise la copule duale,

$$C^*(u, v) = 1 - (1-u) - (1-v) + C(1-u, 1-v) = u + v + C(1-u, 1-v) - 1$$

i.e.

$$C^*(u, v) = u + v + \frac{(1-u)(1-v)}{1-uv} - 1 = \frac{[u+v-1](1-uv) + (1-u)(1-v)}{1-uv}$$

qui se simplifie en

$$C^*(u, v) = \frac{uv[2-u-v]}{1-uv}$$

de telle sorte que

$$\lambda_U = \lim_{u \downarrow 0} \frac{C^*(u, u)}{u} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{u} \frac{2u^2(1-u)}{1-u^2} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{2u}{1+u} = 0.$$

Afin d'avoir un modèle plus flexible, on propose d'introduire un paramètre θ ,

$$H_\theta(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y} + (1 - \theta)e^{-x-y}}, \text{ pour } x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Montrer que si $\theta \in [-1, 1]$, H_θ est une fonction de répartition.

Comme on a une loi définie sur on doit avoir $H_\theta(x, y) \in [0, 1]$, pour tout x et tout y . Ici, le dénominateur appartient à $[1 + \infty]$ (pour tout x et tout y) si

$$e^{-x} + e^{-y} + (1 - \theta)e^{-x-y} \geq 0 \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}$$

ce qui est possible si $1 - \theta \geq 0$, i.e. $\theta \leq 1$.

Une autre condition pour avoir une fonction de répartition est que la fonction soit 2 croissante. Or, avec les mêmes arguments que dans la toute première question, on note que l'on a une loi absolument continue, sur \mathbb{R}^2 . On aura une fonction de répartition si la densité - car elle existe - est positive. Notons que

$$\frac{\partial H_\theta(x, y)}{\partial x} = \frac{e^{-x} + (1 + \theta)e^{-x-y}}{[1 + e^{-x} + e^{-y} + (1 - \theta)e^{-x-y}]^2},$$

avec une expression du même genre pour la dérivée par rapport à y . Cette fonction est positive (c'est une condition nécessaire) si $1 + \theta \geq 0$, i.e. $\theta \geq -1$.

Si on va un cran plus loin,

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H_\theta(x, y)}{\partial x} = \frac{(1 + \theta)e^{-x-y}[1 + e^{-x} + e^{-y} + (1 - \theta)e^{-x-y}]^2 + [e^{-x} + (1 + \theta)e^{-x-y}][e^{-y} + (1 + \theta)e^{-x-y}]}{[1 + e^{-x} + e^{-y} + (1 - \theta)e^{-x-y}]^4}$$

C'est moche, mais seul le signe du numérateur nous intéresse ici. Ce qu'on note c'est qu'avec la condition précédente ($\theta \leq 1$) et en rajoutant $1 + \theta \geq 0$, tous les termes sont positifs.

Aussi, si $\theta \in [-1, 1]$,

$$\frac{\partial^2 H_\theta(x, y)}{\partial x \partial y} \geq 0 \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

6. Quelle(s) valeur(s) de θ correspond(ent) au cas indépendant ?

On a ici les lois marginales (par passages à la limite) qui sont des lois logistique. Aussi, dans le cas indépendant, on a forcément

$$H_\perp(x, y) = F(x) \cdot G(y) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \frac{1}{1 + e^{-y}}$$

soit

$$H_\perp(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y} + e^{-x-y}}$$

Bon, ben on l'a notre loi indépendante: elle est obtenue quand $\theta = 0$ (et uniquement dans ce cas).

7. Donner les fonctions de répartitions marginales de X et Y (notées F et G respectivement), ainsi que la copule associée.

On a vu que les marges étaient des lois logistiques (en passant, dans la question précédente). Si on substitue les quantiles dans la loi jointe, on obtient (je passe les calculs, c'est toujours la même chose)

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$$

Cette loi a été introduite par Ali, Mikhail & Haq (1978) et Conway (1979). On peut d'ailleurs montrer que cette copule est Archimédienne, avec

$$\phi_\theta(t) = \log\left(\frac{1 - \theta(1-t)}{t}\right)$$

Parmi les autres propriétés amusantes, on peut écrire

$$C(u, v) = uv[1 + \theta(1-u)(1-v)] + \sum_{i=2}^{\infty} \theta^i [1-u]^i [1-v]^i.$$

Exercice 2 Soit (U, V) un vecteur Gaussien, centré, dont les variances sont $\text{var}(U) = a^2$ et $\text{var}(V) = b^2$, et de corrélation $r \in (-1, +1)$. On pose

$$X = \frac{U}{a} + \frac{V}{b} \text{ et } Y = \frac{U}{a} - \frac{V}{b}$$

Donnez la copule du couple (X, Y) .

Bon, tout d'abord, notons que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = M \underbrace{\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \text{ où } M = \begin{pmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/a & -1/b \end{pmatrix}$$

Comme U est un vecteur Gaussien, alors X aussi (propriété du vecteur Gaussien). Reste à trouver le paramètre de corrélation. Notons que

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}\left(\frac{U}{a} + \frac{V}{b}, \frac{U}{a} - \frac{V}{b}\right)$$

soit

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{\text{var}(U)}{a^2} - \frac{\text{var}(V)}{b^2} + \frac{\text{cov}(U, V)}{ab} - \frac{\text{cov}(U, V)}{ab}$$

or comme $\text{var}(U) = a^2$ et $\text{var}(V) = b^2$, la covariance est nulle. On a donc un vecteur Gaussien à composante non-corrélés, donc X et Y sont deux variables indépendantes. La copule du vecteur (X, Y) est alors Π .

Exercice 3 Expliquer en quelques lignes comment construire une copule asymétrique, et éventuellement donner son expression.

(pour rappel, C est symétrique si $C(u, v) = C(v, u)$ pour tout $0 \leq u, v, \leq 1$)

On a vu, pendant les exposés, la copule de Marshall-Olkin, obtenue comme la copule du couple (X, Y) avec

$$X = \min\{X_0, Z\} \text{ et } Y = \min\{Y_0, Z\}$$

où X_0, Y_0 et Z sont trois variables exponentielles indépendantes. Si $\mathbb{E}(X) \neq \mathbb{E}(Y)$ la copule associée sera asymétrique. En effet, on peut trouver des coefficients $\alpha \neq \beta$ tels que

$$C^*(u, v) = \min\{u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}\}$$

Et si C^* est asymétrique, C l'est aussi...

On peut aussi construire une copule asymétrique à la main... On peut couper le carré unité en 4 quadrants, et mettre des distributions comonotones et anticomonotones (respectivement) dans les quadrants de la seconde diagonale. Aussi, on regarde le couple (U, V) où la variable V est liée à U par la relation

$$V = \begin{cases} 0.5 + U & \text{si } U \in [0, 0.5) \\ 1 - U & \text{si } U \in [0.5, 1) \end{cases}$$

Exercice 4 Soit C une copule en dimension 2. C est-elle une fonction continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$? Si oui, le démontrer, et si non, donner un exemple de copule présentant une discontinuité.

On l'a vu en cours, toutes les copules sont continues ! En fait, on a plus fort, car les copules sur Lipschitz. Pour tout (u_1, v_1) et (u_2, v_2) , tels que $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$,

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2)| + |C(u_1, v_2) - C(u_1, v_1)|$$

par inégalité triangulaire. Utilisons le fait que les copules sont des fonctions de répartition et sont donc 2 croissantes. Aussi, si $u_1 \leq u_2$

$$\mathbb{P}([u_1, u_2] \times [v_2, 1]) = \underbrace{C(u_2, 1)}_{=u_2} + C(u_1, v_2) - C(u_2, v_2) - \underbrace{C(u_1, 1)}_{=u_1} \geq 0$$

de telle sorte que

$$u_2 - u_1 + C(u_1, v_2) - C(u_2, v_2) \geq 0$$

soit

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \leq u_2 - u_1,$$

alors que si $u_1 \geq u_2$

$$\mathbb{P}([u_2, u_1] \times [v_2, 1]) = \underbrace{C(u_1, 1)}_{=u_1} + C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - \underbrace{C(u_2, 1)}_{=u_2} \geq 0$$

de telle sorte que

$$C(u_1, v_2) - C(u_2, v_2) \leq u_1 - u_2.$$

Aussi, de manière très générale,

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2)| \leq |u_2 - u_1|.$$

Et de même, pour le second terme, on peut montre avec des arguments similaires que

$$|C(u_1, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |v_2 - v_1|.$$

Bref, on a établi que

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$$

c'est à dire que la fonction est Lipschitz, ce qui va garantir la continuité de la fonction C en tout point de $[0, 1] \times [0, 1]$.

Exercice 5 Pour quelles valeurs de α , la fonction $\phi(t) = \alpha(t^{-\alpha} - 1)$ est-elle le générateur d'une copule Archimédienne en dimension 2 ?

On reconnaît ici la copule de Clayton, si $\alpha \neq 0$ (oui, la première chose à faire est d'exclure ce cas, qui ne donne pas de générateur). Faisons simple: la fonction ϕ est ici dérivable, donc on va utiliser ses dérivées pour caractériser la décroissance et la convexité.

$$\phi'(t) = -\alpha^2 t^{-\alpha-1}$$

qui sera toujours une fonction négative sur $(0, 1)$.

$$\phi''(t) = \alpha^2(\alpha + 1)t^{-\alpha-2}$$

qui sera positive dès lors que $\alpha^2(\alpha + 1) \geq 0$, soit $\alpha \geq -1$. Aussi, on a un générateur de copule Archimédienne si et seulement si

$$\alpha \in [-1, 0) \cup (0, \infty).$$

Exercice 6 Donner l'expression de la fonction de Kendall $K(t)$ dans le cas de la copule indépendante Π et des copules comonotone M et anticomonotone W .

Pour rappel, il faut calculer

$$K(t) = \mathbb{P}(C(U, V) \leq t) \text{ pour } (U, V) \sim C.$$

Dans le cas comonotone, si $(U, V) \sim M$, alors $V = U$, et $M(U, V) = \min\{U, V\} = U$. Aussi,

$$K_M(t) = \mathbb{P}(M(U, V) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t) = t$$

pour $t \in [0, 1]$. Dans le cas anticomonotone, si $(U, V) \sim W$, alors $V = 1 - U$, et

$$W(U, V) = \max\{U + V - 1, 0\} = 0$$

Aussi,

$$K_W(t) = \mathbb{P}(W(U, V) \leq t) = \mathbb{P}(0 \leq t) = 1$$

pour $t \in [0, 1]$. Enfin, dans le cas indépendant, $(U, V) \sim \Pi$, alors $\Pi(U, V) = UV$, où on a le produit de deux lois uniformes indépendantes. Aussi,

$$K_{\Pi}(t) = \mathbb{P}(\Pi(U, V) \leq t) = \mathbb{P}(UV \leq t) = \int_0^1 \mathbb{P}(UV \leq t | U = u) du$$

par la formule des probabilités totales. Aussi,

$$K_{\Pi}(t) = \int_0^1 \mathbb{P}(uV \leq t) du = \int_0^1 \mathbb{P}\left(V \leq \frac{t}{u}\right) du = \int_0^t \mathbb{P}\left(V \leq \frac{t}{u}\right) du + \int_t^1 \mathbb{P}\left(V \leq \frac{t}{u}\right) du$$

(oui, je détaille outrageusement les calculs, histoire d'éviter les erreurs), i.e.

$$K_{\Pi}(t) = \int_0^t 1 du + \int_t^1 \frac{t}{u} du = t + [t \cdot \log(u)]_t^1 = t + t \log(t).$$

On notera que quand $t \downarrow 0$, $K_{\Pi}(t) \downarrow 0$ (ce qui est intuitif), et quand $t \uparrow 1$, $K_{\Pi}(t) \uparrow 1$ (ce que l'on espérait aussi).