

EXERCICES, SÉRIES TEMPORELLES, HIVER 2014, MAT8181

ARTHUR CHARPENTIER

1 Soit (ε_t) un bruit blanc de variance σ^2 . Dans les 6 cas suivants, la série (X_t) est-elle stationnaire, au sens faible ? (en discutant de conditions en fonction des valeurs des différentes constantes, éventuellement)

- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$
- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}$
- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \varepsilon_t \cdot \cos[at] + \varepsilon_{t-1} \cdot \sin[at]$ avec $a \in \mathbb{R}$
- si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$
- si pour tout $t \in \mathbb{N}$, $X_t = \sum_{i=0}^t a^i \cdot [\varepsilon_{t-i} - \varepsilon_{t-i-1}]$ avec $a \in \mathbb{R}$

2 Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur Gaussien et posons X_0 la variable aléatoire constante unitaire, $X_0 = 1$. Soit X une variable aléatoire de variance finie, telle que $\gamma = [\text{cov}(X, X_i)]_{i=0,1,\dots,n}$ existe. On posera $\Sigma = [\text{cov}(X_i, X_j)]_{i,j=0,1,\dots,n}$. Soit $\mathbf{a}^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$ tel que

$$\text{EL}(X | \underbrace{X_0, \dots, X_n}_{\mathbf{X}}) = \mathbf{a}^{*\prime} \mathbf{X} = a_0^* + a_1^* X_1 + \dots + a_n^* X_n.$$

Montrer que \mathbf{a}^* est donné par $\mathbf{a}^* = \Sigma^{-1} \gamma$.

3 Soit (Y_t) une série stationnaire, et s_t une suite (déterministe) saisonnière de période d au sens où $s_t = s_{t-d}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

- On pose

$$X_t = a + bt + s_t + Y_t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $Z_t = (1 - L)(1 - L^d)X_t$ est une série stationnaire, et donner sa fonction d'autocovariance en fonction de celle de (Y_t) .

- On pose

$$X_t = [a + bt] \cdot s_t + Y_t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $Z_t = (1 - L^d)^2 X_t$ est une série stationnaire, et donner sa fonction d'autocovariance en fonction de celle de (Y_t) .

4 Soit (X_t) une série temporelle telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} + \varepsilon_t \quad (\star)$$

où (ε_t) un bruit blanc de variance σ^2 . Montrer qu'il existe une suite réelle (a_n) telle que

$$Y_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varepsilon_{t-n}$$

vérifie la relation de récurrence de l'Equation (\star) . Montrer que (ε_t) n'est pas le processus d'innovation de (Y_t) .

5 Soit (X_t) une série temporelle définie par $X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$, avec $|\theta| > 1$, où (ε_t) un bruit blanc de variance σ^2 . On définit

$$Y_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\theta^k} X_{t-k}.$$

Montrer que (Y_t) est un bruit blanc dont on spécifiera la variance.

6 Soit (X_t) une série temporelle définie par $X_t = \phi X_{t-1} \varepsilon_t$, avec $|\theta| > 1$, où (ε_t) un bruit blanc de variance σ^2 . On définit

$$Y_t = X_t - \frac{1}{\phi} X_{t-1}$$

Montrer que (Y_t) est un bruit blanc dont on spécifiera la variance.

7 Considérons deux processus stationnaires, (X_t) et (Y_t) tels que pour tout $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + U_t \text{ et } Y_t = \phi_2 Y_{t-1} + \theta X_t + V_t$$

où (U_t) et (V_t) sont deux bruits blancs non corrélés, de variance σ_U^2 et σ_V^2 respectivement.

On suppose que $\phi_1, \phi_2 \in (0, 1)$.

- Posons $Z_t = (1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L)Y_t$. Montrer que (Z_t) est stationnaire, et calculer sa fonction d'autocorrélation.
- Simuler un tel processus, avec $\theta = 3/2$, $\phi_1 = 3/5$ $\phi_2 = 2/5$ et avec les variances des bruits $(3/5)^2$ et $(2/5)^2$, respectivement, pour 1000 valeurs, et tracer la fonction d'autocorrélation empirique.
- Montrer que (Y_t) est un processus *ARMA*