

Pratiques algorithmiques dans les mathématiques pré-modernes

Symposium du projet Algo (ANR-09-BLAN-0300-01)

Fabio Acerbi (UMR 8163 STL) & Marc Moyon (univ. de Limoges)

12-14 octobre 2011

Lille

Les pratiques algorithmiques dans les mathématiques liées à la science des héritages en pays d'Islam

Ezzaim LAABID

ENS, Université Cadi Ayyad, Marrakech

Maroc

Sommaire

- Introduction
- Aperçu juridique
- Les thèmes constituant la science des héritages –
catégorisations de problèmes
- Pratiques algorithmiques
 - Exemple
 - Terminologie de base
 - Algorithmes de base
 - Une évolution de la procédure de résolution

Discipline à cheval entre droit et mathématiques

Cette discipline a connu un essor considérable et a suscité un grand intérêt dans les milieux d'enseignement à la fois chez les juristes et chez les mathématiciens

Intérêt des juristes

se justifiait par les débats juridiques que cette discipline mettait en œuvre.

Intérêt des mathématiciens

redevable au fait que ce domaine pouvait générer des activités mathématiques variées.

Le 'ilm al-farâ'id

C'est une science qui étudie les cas du partage d'une succession suivant les portions prescrites par le livre du Dieu, par la *Sunna* de son prophète et par le consensus <des savants> de la nation.

علم باحث عن أحوال قسمة التركة على فروض مقدرة في كتاب
الله تعالى وسنة رسوله واجماع أمة رسوله، وهذا العلم باب من
علم الفقه

Le 'ilm hisâb al-farâ'id

C'est une science qui permet la connaissance des lois relatives au calcul des "*farâ'id*" liées au partage d'une succession. Elle est considérée comme faisant partie des sciences religieuses puisqu'elle a trait aux *farâ'id*, mais elle fait aussi partie de l'arithmétique car elle est aussi <constituée> des règles de calcul "

(*Tash kubra zadah, vol.2, p.426*)

وهو علم يتعرف منه قوانين تتعلق بحساب الفرائض المتعلقة بقسمة التركة. وهذا وإن كان من فروع العلوم الشرعية لتعلقه بالفرائض، لكنه من حيث كونه قواعد حسابية يكون من فروع علم العدد.

Valorisation

Apprenez <la science des> *farā'id* et enseignez la aux gens. <Car> elle constitue la moitié [ou le tiers] de la science, elle s'oublie <vite>; et elle est la première <des sciences> à disparaître.

تعلموا الفرائض و علموها للناس، فإنها نصف أو ثلث العلم وإنها تنسى، وهي
أول ما ينزع من امتي

C'est une science autonome

- Sa difficulté et le désir de la valoriser (Tash Kubrâ Zadah)
 - La place dominante qui y occupent les calculs (Ibn Khaldûn)
- ont amené les savants à lui consacrer des ouvrages autonomes.

Aperçu juridique

Liens permettant d'accéder à l'héritage

- Lien de parenté
- Lien de mariage
- Lien d'allégeance

Héritiers potentiels

Parenté:

- Ascendants → père, grand père, mère , grandes -mères
- Descendants → fils, fille, fils du fils, fille du fils
- Collatéraux: descendants du père (frères et sœurs); descendants du grand père (oncles)

Mariage : Mari et épouses

Allégeance: Libérateur et libératrice

Catégorisations

Selon la source du droit musulman dont découle la vocation successorale de l'héritier (Coran, *Hadith* ou Consensus)

Selon la qualité permettant l'accès à l'héritage (héritier à part fixe ou héritier à reliquat).

Deux types d'héritiers

- **Un héritier à part fixe** : c'est un héritier potentiel qui doit recevoir une portion de l'héritage déterminée préalablement et fixée par le Coran, le Hadith ou le Consensus.
- **Un héritier à reliquat** : C'est un héritier potentiel qui peut recevoir la totalité de l'héritage, ce qui en reste après le prélèvement des portions destinés aux héritiers à part fixe ou ne rien recevoir si l'héritage est épuisé par ces derniers.

Catégorisation 1

- Héritiers à part fixe exclusivement:

La mère, le mari, l'épouse, la grand-mère, le frère utérin,
la sœur utérine

- Héritiers à part fixe ou à reliquat sans cumul

La fille, la fille du fils, la sœur germaine, la sœur
consanguine

- Héritiers à reliquat ou à part fixe avec cumul

Le père et le grand père

- Héritiers à reliquat exclusivement

Les autres héritiers

Catégorisation 2

Coran:

Père, mère, fille, fils, frère utérin, sœur utérine, mari, épouse

Hadith :

Grande mère maternelle, fille du fils, allégeance,

Consensus:

Grand-père, sœur consanguine, grand-mère paternelle

Règles fixant la priorité d'accès à un héritage

un héritier potentiel peut cacher un autre et le priver soit totalement soit partiellement de l'héritage → exclusion partielle ou totale

Exclusion partielle

enfant → mère passe du tiers au sixième

Exclusion totale

- lien parental: père exclut le grand père
- causes extérieures

Cas exceptionnels

- Cas du ^cAwl (réduction proportionnelle)

Une femme décédée laisse son mari $\langle 1/2 \rangle$, sa mère $\langle 1/2 \rangle$, sa sœur germaine $\langle 1/2 \rangle$ et son grand-père $\langle 1/6 \rangle$

- Cas commun (*al-mushtaraka*)

Une femme décédée laisse sa mère $\langle 1/6 \rangle$, son mari $\langle 1/2 \rangle$, ses deux frères utérins $\langle 1/3 \rangle$ et ses deux frères germains $\langle \text{reste} \rangle$.

Thèmes constituant la science des héritages - catégorisation de problèmes

Cette science est constituée:

d'une partie de la jurisprudence: les lois successorales, les parts légales, la réduction des parts prescrites (*ʿawḥ*), la reconnaissance ou non des héritiers, les testaments, l'affranchissement testamentaire (*tadbīr*) etc,

et d'une partie de la science du calcul <des nombres entiers, des fractions, des racines, du connu, de l'inconnu>, qui permet de déterminer en nombres entiers les quotes-parts en accord avec les prescriptions de la loi [Ibn khaldûn, p.536]

Objet du *‘ilm al-farâ'id*

- Les règles juridiques relatives aux héritages et aux thèmes qui leur sont liés

et

- Les lois et les techniques de calcul qui permettent la résolution des problèmes mathématiques qui en découlent

Les thèmes juridiques

- Lois successorales de base
- Décès successifs
- Liquidation de succession
- Dettes
- Affranchissement posthume
- Désistement d'héritiers
- Reconnaissance et contestation
- Testaments
- Hermaphrodite
- Héritage par allégeance

Lois successorale de base

Situations où interviennent des héritiers dont l'accessibilité à l'héritage est régie par les règles ordinaires de l'héritage par parenté

un homme décédé laisse son épouse, sa grand-mère, sa fille et ses cinq sœurs consanguines.

Les décès successifs

Situations où certains héritiers potentiels d'une personne décédée meurent avant le partage de son héritage

un homme décédé laisse deux fils et deux filles. Avant le partage, l'un des fils est décédé en laissant son fils et sa fille.

Liquidation de succession

Trois types de biens :

- numéraires (*ʿayn*): bijoux, or, argent...
- mobiliers non numéraires (*ʿurûd*): animaux, esclaves, tissus...
- immobiliers (*ʿusûl*): maisons, jardins, vergers..

une femme décédée laisse son mari, son fils, sa fille et une succession constituée de biens numéraires et de biens immobiliers. Après le partage des biens numéraires entre tous les héritiers, le fils et la fille ont acheté la part du mari dans les biens immobiliers

Dettes

Situations où une partie de l'héritage laissé par le défunt est une dette et/ou doit servir à payer une dette

une femme décédée laisse son mari, sa mère, sa sœur germaine, sa sœur consanguine, sa sœur utérine. Elle a en outre laissé un héritage valant 20 dinars et une dette qui vaut 10 dinars, comme une dot impayée envers son mari qui est dans le dénuement.

Affranchissement posthume

Situations où une partie de l'héritage est un esclave sujet d'un affranchissement posthume

une femme décédée laisse son mari, son père, sa mère et un esclave *mudabbar*, dont la valeur est $E=100$, un bien numéraire $S_1=50$ et une dette envers le mari, qui est dans le dénuement, $d=100$

Désistement

Situations où certains héritiers se désistent totalement ou partiellement de leur part en faveur des autres héritiers.

un homme décédé laisse son épouse, son frère consanguin, sa sœur consanguine. Le frère se désiste de la moitié de sa part à condition que cette moitié soit partagée entre la sœur et l'épouse selon les proportions $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ de leur part respectives.

.

Reconnaissance et contestation (pb. *Iqrâr*)

Situations où intervient un héritier dont le lien de parenté avec la personne décédée est sujet du doute de la part de certains héritiers.

un homme décédé laisse son épouse, sa mère, ses deux frères utérins, sa sœur consanguine et sa sœur germaine. La sœur germaine reconnaît un frère germain. La sœur consanguine conteste cette reconnaissance mais les autres héritiers la ratifient.

Testaments (Types)

Situations où interviennent des testaments.
Deux types de testaments:

- testament exprimé à l'aide de fractions déterminées de l'héritage
- testament formulé, en fonction des parts des héritiers, à l'aide d'expression « mathématique » plus ou moins compliquée

Testaments (exemples)

- Une femme décédée laisse son mari, sa mère, son fils et elle a en outre légué à ses 3 sœurs les trois quarts d'un cinquième de son héritage et à ses 4 tantes les quatre septièmes d'un sixième de son héritage
- Un homme décédé laisse quatre fils et lègue à un homme une portion qui est égale à la part de l'un des fils moins un tiers de ce qui reste du tiers

Hermaphrodite

Situations où l'un des héritiers est une personne hermaphrodite (*khunthâ*)

Un homme décédé laisse son épouse, ses deux fils, sa fille et un enfant hermaphrodite

Héritage par allégeance

Situations d'affranchissement d'esclave.
L'héritage d'un esclave affranchi, n'ayant pas d'héritiers par parenté, doit revenir à son libérateur et aux héritiers de ce dernier selon certaine priorité.

Deux filles achètent leur père, puis l'une d'elle et le père achètent le fils de ce dernier. Puis meurent successivement l'autre fille, le père et le fils.

Catégorisations de problèmes

- Le thème juridique (catégorisation naturelle)
- Le clivage artificiel/réel
- Le clivage arithmétique/algébrique

Clivage réel/artificiel

- Domaine pratique: problèmes réels comme les problèmes à noms spéciaux....
- Domaine d'enseignement: problèmes artificiels
 - Deux procédés d'obtention de problèmes artificiels: agir sur les modalités juridiques et/ou sur les constituants mathématiques

Clivage arithmétique/algébrique

- La majorité des problèmes sont arithmétiques
- Certains problèmes des testaments peuvent être algébriques ou arithmétiques selon la doctrine adoptée (malékite ou hanafite)

Interprétation selon la doctrine

Un homme décédé laisse quatre fils. Il lègue en outre du tiers de l'héritage une portion qui est égale à la part de l'un des fils moins un tiers de ce qui reste du tiers.

Hanafite (H) ou malékite(M)

$$z-y= 4x \text{ et } y= x-(1/3)[(1/3)z-x] \text{ (H)}$$

$$z-y= 4x \text{ et } y =(1/4)z-(1/3)[(1/3)z-(1/4)z] \text{ (M)}$$

Où z: héritage, x: part d'un fils, y: testament

Les pratiques algorithmiques

A l'aide d'exemples: mettre en évidence les algorithmes et la terminologie de base et le principe sous-jacents à ces pratiques

Exemple illustratif

Un homme décédé laisse ses quatre épouses $\langle 1/4 \rangle$, sa sœur germaine $\langle 1/2 \rangle$, ses douze sœurs consanguines $\langle 1/6 \rangle$ et ses dix oncles paternels $\langle \textit{reste} \rangle$.

Une solution libre

Les 4 épouses se partagent $\frac{1}{4}$ de l'héritage, chacune reçoit: $\frac{1}{16}$;

Les 12 sœurs consanguines se partagent $\frac{1}{6}$ de l'héritage, chacune reçoit : $\frac{1}{72}$;

La sœur germaine reçoit $\frac{1}{2}$ de l'héritage.

Les 10 oncles se partagent : $\frac{1}{12}$ de l'héritage, chacun reçoit: $\frac{1}{120}$;

Dénominateur commun est: $\text{ppcm}(16,120,72)=720$,
d'où : une épouse : $\frac{45}{720}$; une sœur consanguine :
 $\frac{10}{720}$; un oncle : $\frac{6}{720}$; la sœur germaine:
 $\frac{360}{720}$.

Solution d'al-Hûfî (m.1192)

Héritiers	Q.P	A=12		D= 60 x A =720	
4 épouses	1/4	3	4	180	4 x 45
Sœur.g	1/2	6		360	
12 Sœurs.c	1/6	2	6	120	12 x 10
10 Oncles	reste	1	10	60	10 x 6

Etape 1

On cherche le plus petit nombre dont le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{2}$ et le $\frac{1}{6}$ sont des entiers. Il est égal à $A=12$.
Puis on calcule à l'aide de ce nombre les parts des héritiers d'où :

les 4 épouses : $\frac{1}{4} A=3$;

la sœur germaine : $\frac{1}{2} A=6$;

les 12 sœurs consanguines : $\frac{1}{6} A =2$;

les 10 oncles : $12-(3+6+2)=1$.

Etape 2

Comme les valeurs obtenues, à l'étape 1, pour les quotes-parts d'une épouse, d'une sœur consanguine et d'un oncle ne sont pas des entiers, on a un problème à trois **fractionnements** .

D'où les couples suivants : $(4,3)$, $(12,2)$ et $(10,1)$. Les éléments du premier et du troisième couple sont **incommensurables** et ceux du deuxième sont **congrus**.

On retient alors : le nombre des épouses, soit 4, le **congru** du nombre des oncles, soit 6 et le nombre des oncles, soit 10

Etape 3

Tu étudies la commensurabilité entre le nombre des épouses $\langle 4 \rangle$ et le *rāji* du nombre des sœurs $\langle 6 \rangle$ et tu trouves qu'ils sont congrus dans la moitié.

Tu multiplies alors le *rāji* de l'un par la totalité de l'autre $\langle 4/2 \times 6 = 6/2 \times 4 \rangle$; il en résulte 12. Puis tu étudies la commensurabilité entre 12 \langle ce dernier résultat \rangle et le nombre d'oncles $\langle 10 \rangle$ et tu trouves qu'ils sont aussi congrus dans la moitié.

Tu multiplies la moitié de l'un par l'autre $\langle 10/2 \times 12 = 12/2 \times 10 \rangle$. Il en résulte 60.

Etape 4

Le nombre cherché est: $D = 60 \times 12 = 720$:

les 4 épouses : $60 \times 3 = 180 \rightarrow$ une épouse : $180/4 = 45$;

la sœur germaine : $60 \times 6 = 360$;

les 12 sœurs consanguines : $2 \times 60 = 120 \rightarrow$ une sœur
consanguine : $120/12 = 10$;

les 10 oncles : $60 \times 1 = 60 \rightarrow$ un oncle : $60/10 = 6$.

Terminologie et concepts de base

- Le *Aşl al mas'ala* (ou *Aşl al-faīda*) désigne le dénominateur d'une ou de plusieurs parmi les fractions qui représentent les portions prescrites par la loi (à savoir $1/2, 1/4, 1/8, 1/3, 2/3$ et $1/6$) qui interviennent dans le problème.
- On peut le traduire par dénominateur de base du problème ou dénominateur initial du problème
- Le terme « *Aşl* » a plusieurs significations selon le contexte: origine, principe. Il est utilisé probablement pour signifier un point de départ de la procédure de résolution.

Détermination du Asl

Pb. Cont	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$, et $\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$ et ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$)	$\frac{1}{4}$ et ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$)	$\frac{1}{8}$ et ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$)
Asl	2	4	8		3	6		12	24

Le fractionnement (*inkisâr*)

Lorsque le calcul de la quote-part d'un héritier ne peut être fait d'une manière exacte, on parle de fractionnement des quotes-parts. Ainsi, al-^cUqbânî (m.1408):

« j'entends par fractionnement le fait que le nombre représentant la quote-part n'est divisible par celui des têtes qu'avec fraction »

[al-^cUqbânî, op.cit,f.24v]

Fractionnement (suite)

- Cette appellation trouve probablement son origine dans le fait que le quotient d'une division non exacte est exprimé à l'aide des nombres fractionnaires dans la tradition arithmétique arabe [Djebbar,1990,p.6].
- Il en est ainsi encore au XVe siècle puisqu' al-Qalaṣādī (m.1486) représente le quotient de 579 par 8 comme étant $72 \frac{3}{8}$ [Souissi (1988), p.53].

Le *Juz' as-sahm*

- La procédure d'élimination de fractionnements consiste à chercher un nombre (coefficient de proportionnalité) que l'on doit multiplier par le *Aşl al-mas'ala* pour que l'on n'ait plus de fraction lors du partage
- La détermination de *juz'as-sahm* dépend du nombre de fractionnements qui interviennent dans le problème.

Juz'as-sahm (suite)

En général, il s'agit d'un ppcm.

Dans l'exemple, la démarche pour son calcul peut s'écrire:

$J = \text{ppcm}[\text{ppcm}(w(4,3), w(12,2)), w(10,1)]$ où

$w(h,p) = p / \text{pgcd}(h,p)$ (h : nombre d'héritiers,
p: part qui leur revient)

Le plus petit nombre permettant de résoudre le problème en nombres entiers est:

$D = J \times A$ (A est *Asl al-mas'ala*)

Le *rāji*^c d'un nombre par rapport à un autre

- Recherche du plus petit nombre → simplifications au cours des calculs → le *rāji*^c ou le *wafq* (congru)
- « c'est l'expression utilisée par les spécialistes des héritages. Ils disent *rāji*^c ou *wafq*. C'est à quoi aboutit le grand nombre lorsqu'on enlève la commensurabilité » [al-Qalasadī, 1999, p.258]
- a et b étant deux entiers, le *rāji*^c de a par rapport à b est égal à : $w(a,b) = a / \text{pgcd}(a,b)$.

Râjîc (suite)

$w(a,b)$ ne représente un *râjîc* que si $\text{pgcd}(a,b)$ est différent de 1 et de a .

râjîc : inverse de pgcd , sorte de généralisation des expressions du type: moitié, quart,....

râjîc al-mas'ala : « si tu veux, tu divises les coefficients du problème par celui des carrés, ce qui en résulte est le *râjîc al-mas'ala* » [Ibn al-Banna, p.75]

Principe de base

La résolution d'un problème consiste à trouver des nombres entiers D et p_1, \dots, p_n tels que :

(1) $D = p_1 + \dots + p_n$

(2) D, p_1, \dots, p_n sont premiers entre eux dans leur ensemble.

D étant le plus petit nombre qui permet de résoudre le problème en nombres entiers.

Témoignage d'aṭ-Ṭarābulṣī(Xe s.)

« saches que l'objet du calcul des héritages est, d'une part, la détermination des quotes-parts comme des nombres ne contenant pas de fraction et d'autre part, la considération du plus petit possible qui permet de calculer ces quotes-parts. Saches aussi que celui qui a déduit les quotes-parts d'un nombre alors qu'on peut les déduire d'un nombre plus petit a commis une erreur dans le partage » [Ms. privé, f.24]

Témoignage d'al-Ḥubūbī (XI^e s.)

« si on peut résoudre un problème <d'héritage>, en nombres entiers, à partir d'un nombre plus petit celui qui l'aurait résolu d'un nombre plus grand commet une erreur »

[Al-Ḥubūbī, ff.27b-28a].

Point de vue d'al-Uqbânî

Exemple: une femme décédée laisse son mari
<1/4> et ses six fils <reste>

Le mari reçoit $\frac{1}{4}$ et les six fils se partagent le reste, soit $\frac{3}{4}$, équitablement. D'où le mari reçoit $\frac{1}{4}$ et chaque fils : $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$. En rendant au même dénominateur, on obtient : le mari $\frac{2}{8}$ et chaque fils : $\frac{1}{8}$.

Point de vue d'al-Uqbânî (suite)

« si l'un des spécialistes prend dans cet exemple comme dénominateur du problème un multiple de huit, comme par exemple, seize, vingt-quatre ou tout autre multiple, puis il prend pour la quote-part du mari son quart et pour celle de chaque fils son huitième, il arrive à son but.

Car le but est le partage de l'héritage selon des rapports <représentés par > les quotes-parts, et ainsi, n'importe quel nombre ou n'importe quelle fraction, permettant de calculer ces rapports conduit au but.

Mais, les spécialistes des héritages considèrent celui qui procède de la sorte comme étant en erreur d'un point de vue de l'art < *ṣinā'a* > du calcul dans la science des héritages ». [al-^cUqbânî,op.cit, f.25 v]

« Algorithmes » de base

- Rapports de commensurabilité
- Ppcm de deux ou de plusieurs nombres

Rapports de commensurabilité

Pour deux nombres $\langle a \text{ et } b \rangle$ quelconques on a quatre possibilités. Ils sont:

- soit homologues (*mutamāthilān*) $\langle a=b \rangle$,
- soit incommensurables (*mutabāyinān*) $\langle a \text{ et } b$
premiers entre eux \rangle
- soit proportionnels (*mutanāsibān*) \langle divise b
ou b divise $a \rangle$
- soit congrus (*mutawāfiqān*) \langle il existe d tel
que d divise a et d divise $b \rangle$

Selon al-Hûfî (m.1192)

La **congruence** [*al-muwāfaqa*]- qui est aussi appelée la commensurabilité [*al-ishtirāk*]- signifie que les deux nombres sont mesurés par une même partie commune.

La **proportionnalité** [*al-munāsaba*] signifie que le nombre de têtes est un multiple de celui des quote-parts.

L'**incommensurabilité** [*al-mubāyana*] signifie que les deux nombres n'ont aucune partie commune et ne sont mesurés d'une façon commune que par un
[al-Hûfî,f.15].

Justification d'al-Uqbânî

« la démonstration en est que: deux nombres sont : soit égaux soit inégaux ; s'ils sont égaux ce sont des nombres homologues.

<S'ils sont inégaux alors> ou bien ils ont pour mesure commune un nombre ou ils n'en ont pas ; s'ils ont une mesure commune ce sont les commensurables, sinon ils sont incommensurables.

Ensuite, pour les commensurables, si le plus petit permet de mesurer le plus grand, ils sont alors désignés par proportionnels (*mutanāsibān*) ou par imbriqués (*mutadākhilān*) ;

et si le plus petit ne mesure pas le plus grand et les deux nombres sont mesurés par un troisième nombre qui diffère de chacun d'eux, ils sont alors dits congrus (*mutawāfiqān*) »
[al-^cUqbānī, f.24v-25r].

Procédures de reconnaissance des rapports

La procédure des soustractions

La décomposition en facteurs premiers

La procédure des divisions successives

Soustractions successives

« on peut connaître cela, en soustrayant le plus petit nombre du plus grand une ou plusieurs fois. <Alors> si:

le plus grand est épuisé < par ces soustractions>
les deux nombres sont proportionnels ;

s'il reste du plus grand un reste, tu soustrais ce reste <une ou plusieurs fois> du plus petit nombre. <Alors > si :

ce dernier est épuisé <par ces soustractions>, les deux premiers nombres sont congrus et leur congruence a lieu dans la partie dénommée du reste car il permet de les mesurer ;

Soustractions successives (suite)

s'il subsiste un <autre > reste, tu le soustrais <une ou plusieurs fois> du premier reste ;
et tu procèdes de la sorte jusqu'à l'obtention d'un reste qui est épuisé par celui qui le suit,
auquel cas la congruence des deux nombres a lieu dans la partie dénommée de ce reste puisqu'il mesure les deux nombres ;
mais si la soustraction aboutit à un, les deux nombres sont incommensurables puisqu'ils ne sont alors mesurés que par un ».

[al-Hūfī, f.15]

Procédure de décomposition

« On peut aussi arriver à cela <les rapports de commensurabilité entre deux nombres> par la <technique de> décomposition.

Tu décomposes le nombre de têtes et le nombre de quote-parts chacun en ses nombres premiers.

Si aucun des nombres premiers n'est répété dans les deux décompositions alors les deux nombres sont incommensurables.

Et dans la partie <dénommée> du nombre répété - ou du nombre constitué par la composition des nombres répétés dans le cas où il y a plus d'un nombre répété- a lieu la congruence <ou> la commensurabilité et la proportionnalité des deux nombres». [al-Ḥūfī, ff.15-16]

Divisions successives

« si tu veux connaître si deux nombres sont incommensurables ou non,

tu divises le plus grand par le plus petit, s'il se divise alors les deux nombres sont proportionnels, <mais> s'il ne se divise pas alors ou bien le reste est égal à un ou bien il est supérieur à un .

Si le reste est égal à un, les deux nombres sont incommensurables ;

et si le reste est différent de un alors il est nécessairement inférieur au diviseur <c'est-à-dire le plus petit des deux nombres précédents>.

Tu considères alors comme si les nombres dont tu cherches la commensurabilité par ce procédé sont ce reste et le diviseur.

Divisions successives (suite)

- Tu divises <alors> le plus grand par le plus petit, alors s'il se divise, les deux premiers nombres sont congrus ; et la partie dénommée du nombre par lequel la division est effectuée en dernier est la plus petite partie dans laquelle les nombres sont congrus. <Mais> s'il ne se divise pas, < deux cas sont possibles> : il reste un ou un nombre supérieur à un. S'il reste un, les deux premiers nombres sont incommensurables et s'il reste plus de un, le reste est nécessairement plus petit que le dernier diviseur.

Divisions successives (suite)

Tu fais avec ce reste et le dernier diviseur ce que tu as fait précédemment avec les autres nombres.

En continuant ainsi les divisions tu aboutis obligatoirement à une division dans laquelle il ne reste rien ou une division qui a un pour reste.

Alors, si tu aboutis à une division exacte, les deux nombres initiaux sont congrus dans la partie dénommée du dernier diviseur ; c'est la plus petite ou la seule partie dans laquelle ces nombres sont congrus ;

<mais> si tu aboutis à un nombre qui donne pour reste un, tes deux nombres initiaux sont incommensurables »

[al-^cUqbānī, f.28v]

Divisions ou soustractions?

Le sens de sa parole « retrancher le plus petit du plus grand une ou plusieurs fois » est le même que celui de la notre « le plus grand est divisé par le plus petit ».

<Quoique> la division soit plus simple d'un point de vue pratique que « la soustraction du plus petit du plus grand plusieurs fois », les spécialistes des héritages ont suivi en cela, et Dieu seul le sait, l'expression d'Euclide <prop. VII.1>.

Une telle expression est plus conforme à l'intention d'Euclide que notre expression « diviser le plus grand par le plus petit », mais la division convient mieux que la soustraction au but visé ici.

[al-^cUqbānī, f.28v]

Le ppcm

Le ppcm intervient dans la pratique mathématique des héritages à deux niveaux.

Le premier concerne la recherche du dénominateur commun des fractions qui interviennent dans les problèmes.

Le deuxième niveau a trait à l'élimination des fractionnements dans la recherche de Juz'as-Sahm.

Le ppcm

La détermination (indirecte) du ppcm est effectuée dans cette pratique selon deux procédés.

Le premier consiste à déduire le ppcm en examinant la nature des rapports de commensurabilité entre les nombres : l'identité, la congruence, la proportionnalité, l'incommensurabilité. (distinction des cas)

Le second permet de déduire directement le ppcm en se basant sur la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers. (décomposition)

Calcul du ppcm de deux nombres

		lien entre a et b
	$a=b$	identité
$\text{ppcm}(a,b)$ =	$\text{sup}(a,b)$	proportionnalité
	ab	incommensurabilité
	$b.(a/\text{pgcd}(a,b)) =$ $a.(b/\text{pgcd}(b,a))$	congruence

Autre manière de calcul

Al-^cUqbānī qualifie cette manière de déterminer le ppcm de deux nombre de la manière répandue parmi les spécialistes des héritages.

La règle générale <pour éliminer deux fractionnements> dans les trois types autres que les incommensurables est que tu multiplies le *wafq* de l'un par la totalité de l'autre, puis <tu multiplies> ce qui en résulte par le *Aṣl al-faīda*. Le résultat obtenu <de cette dernière multiplication> permet de résoudre le problème en nombres entiers. Cependant, les spécialistes des héritages pensent qu'il est long de procéder ainsi.

Manière simplifiée de calcul

La formulation d'al-^cUqbānī peut être formulée ainsi :

$\text{ppcm}(a,b)=ab$ si a et b sont incommensurables

$\text{ppcm}(a,b)=b \times a/\text{pgcd}(a,b) = a \times b/\text{pgcd}(a,b)$
si a et b sont commensurables

Procédé de décomposition

- 1) on décompose a et b en leurs nombres premiers;
- 2) on retient un seul des nombres qui figurent dans les deux décompositions;
- 3) on retient tous les nombres qui ne figurent que dans l'une des décompositions;
- 4) le $\text{ppcm}(a,b)$ est égal au produit des nombres retenus.

Le ppcm de plusieurs nombres

On distingue plusieurs cas (par exemple pour 3 nombres, al-Hûfî envisage 12 cas).

- deux procédés : Koufa et de Basra
- le procédé de décomposition

ppcm: Basra et Koufa

$$M = \text{ppcm}[\text{ppcm}(a,b),c] \quad (\text{Koufa})$$

$$M = a \cdot \text{ppcm}[b/\text{pgcd}(a,c),c/\text{pgcd}(a,b)]$$

(a étant le plus grand)

Al-Hassâr précise que les spécialistes des héritages adoptent pour cela un procédé qu'ils appellent *tarîq al-mawqûf*

Procédés koufa et basra (suite)

Quant à la manière de chercher le plus petit nombre mesuré par trois nombres donnés, Euclide a procédé ainsi :

déterminer le plus petit nombre mesuré par deux parmi les trois nombres ; déterminer ensuite le plus petit nombre mesuré par le nombre trouvé et le troisième nombre donné ; le résultat $<$ de cette dernière recherche $>$ est le plus petit nombre mesuré par les trois nombres donnés.

Cette démarche est l'une des manières utilisées, pour cette fin, par les spécialistes des héritages dont al-Hūfī.

Euclide en a donné une démonstration à laquelle on ne peut rien ajouter [al-Uqbânî]

Procédé de décomposition

Selon ce procédé, le $\text{ppcm}(a,b,c)$ est cherché de la manière suivante:

1. on décompose a , b et c en leurs nombres premiers
2. on retient un seul des nombres figurant dans les trois décompositions;
3. on retient les nombres qui ne figurent pas dans, au moins, l'une des trois décompositions;
4. le ppcm est égal au produit des nombres retenus.

Remarques

Les algorithmes utilisés pour le calcul du nombre qui permet de résoudre en nombres entiers plusieurs problèmes des catégories : *farā'id*, *Munāsakha*, *Ṣulḥ* et *Waṣāy* peuvent s'écrire, en termes modernes par une même formule.

Dans cette « formule », aux nombres d'héritiers et ceux des quotes-parts dans les problèmes *Farā'id* correspondent respectivement dans les problèmes *munāsakha* les dénominateurs des problèmes des héritiers décédés et les quotes-parts de ces derniers, dans les problèmes *Ṣulḥ* les dénominateurs du PFA (problème *farā'id* associé) et le reste du dénominateur du désistement et dans les problèmes *Waṣāyā* les dénominateurs du PFA et le reste du dénominateur des testaments.

Une nouvelle approche

Un problème d'héritage se ramène à:

Comment partager l'unité en plusieurs fractions?

- une procédure unique (de base) exprimée en termes généraux

Ibn Safwân al Mâlaqî (m.1361)

1. Décomposer les dénominateurs des fractions intervenant dans le partage en facteurs premiers.
2. Rechercher le dénominateur commun (*Talkhîs*)
3. Déterminer la part qui revient à chaque fraction du partage

Apport de la méthode

Cette procédure dispense de :

- l'étude des fractionnements des parts
- la considération des fractionnements multiples
- l'étude de la commensurabilité, la congruence,...
- des procédés de Basra et de Koufa

Merci

pour votre attention